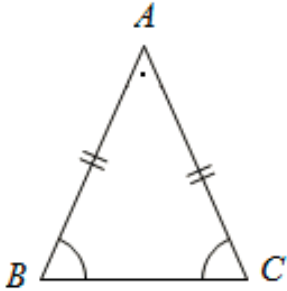


第3讲等腰三角形基础

一、等腰三角形的概念

	有两边 <u>相等</u> 的三角形是等腰三角形。
	相等的两边叫做 <u>腰</u> ，另一条边叫做 <u>底边</u> ， 两腰的夹角叫做 <u>顶角</u> ，底边与腰的夹角叫做 <u>底角</u> 。
	如图，等腰 $\triangle ABC$ ， AB 、 AC 为腰， BC 为底边， $\angle A$ 为顶角， $\angle B$ 、 $\angle C$ 为底角

🗣️ 举个“栗”子

栗子1

1. 等腰三角形的一个角是 80° ，则它的底角是（ ）。

A. 50°

B. 80°

C. 50° 或 80°

D. 20° 或 80°

【备注】 等腰三角形的概念，常考察分类讨论，注意所给角度是顶角还是底角

【答案】 C

【解析】 ①当顶角是 80° 时，它的底角 $=\frac{1}{2} \times (180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ$ ；

②底角是 80° 。

综上，底角是 50° 或 80° 。

故选：C。

【标注】【知识点】已知一角求其余两角

2. 等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为 30° ，则底角的度数为（ ）。

A. 60°

B. 120°

C. 60° 或 120°

D. 60° 或 30°

【备注】 典型分类讨论的题目，与高结合注意是内部高还是外部高

【答案】 D

【解析】如图，分两种情况：

在图①中， $AB = AC$ ， $BD \perp AC$ ， $\angle ABD = 30^\circ$

，

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

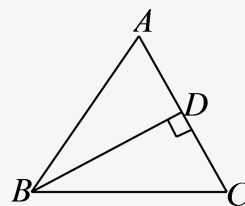
$$\therefore \angle C = \angle ABC = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 60^\circ;$$

在图②中， $AB = AC$ ， $BD \perp AC$ ， $\angle ABD = 30^\circ$

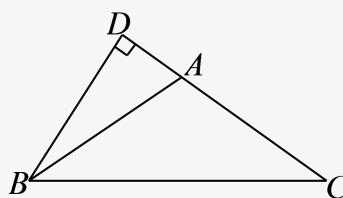
，

$$\therefore \angle DAB = 60^\circ, \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle ABC = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 30^\circ.$$



图①



图②

【标注】【知识点】腰上的高与腰的夹角问题

栗子2

3. 等腰三角形两边长为12和6，等腰三角形的周长为 _____ .

【备注】注意结合三角形两边之和大于第三边解题

【答案】30

【解析】当12是腰长时，三边分别是12，12，6，

能组成三角形 .

$$\therefore \text{等腰三角形的周长为 } 12 + 12 + 6 = 30,$$

当6是腰长时，三边分别是6，6，12 .

$$\because 6 + 6 = 12,$$

$\therefore$ 不能组成三角形，

故答案为30 .

【标注】【知识点】已知两边求第三边或周长

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，若周长为20，则 AB 边长的取值范围是 _____ .

【备注】第3题的延伸，仍结合三角形两边之和大于第三边解题，可以设腰长为 x

【答案】 $5 < AB < 10$

【解析】设 $AB = x = AC$,

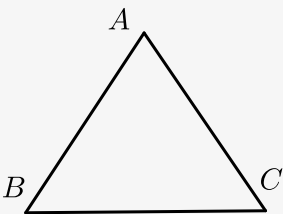
则 $BC = 20 - 2x$,

$$\therefore \begin{cases} x > 0 \\ 20 - 2x > 0 \\ 2x > 20 - 2x \end{cases} \text{ 解}$$

不等式组得

$$5 < x < 10.$$

$$\therefore 5 < AB < 10.$$



【标注】【知识点】已知两边求第三边或周长

5. 等腰三角形的一腰的中线把三角形的周长分成16cm和12cm，则等腰三角形的底边长为 _____ .

【备注】此类题目要画图去做，在计算时可利用二元一次方程组去求长度

【答案】 $\frac{20}{3}$ 或12

【解析】设等腰三角形的腰长是 x ，底边是 y ，

$$\text{根据题意得} \begin{cases} x + \frac{x}{2} = 16 \\ \frac{x}{2} + y = 12 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x + \frac{x}{2} = 12 \\ \frac{x}{2} + y = 16 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{32}{3} \\ y = \frac{20}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases}.$$

经检验，均符合三角形的三边关系.

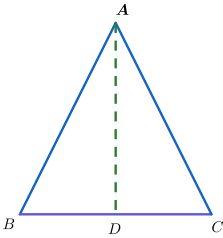
因此三角形的底边是 $\frac{20}{3}$ 或12.

故答案为： $\frac{20}{3}$ 或12.

【标注】【知识点】等腰三角形的中线分周长

二、等腰三角形的性质

1. 等边对等角

性质1	等腰三角形的两个 <u>底角</u> 相等（简写成 “ <u>等边对等角</u> ” ）。
	【用符号语言表示】 $\because AB = AC,$ $\therefore \angle B = \angle C \text{ (等边对等角)}.$

【备注】已知： $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$

求证： $\angle B = \angle C$

【证明】：

过点A作BC的垂线交于点D

则有 $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形

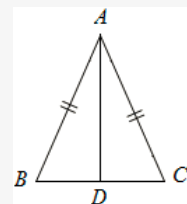
$\therefore AB = AC$

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 和 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中

$$\begin{cases} AB = AC \\ AD = AD \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ADB \cong \text{Rt}\triangle ADC (\text{HL})$

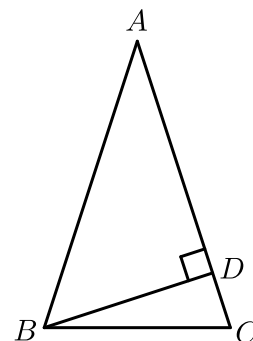
$\therefore \angle B = \angle C,$



🧠 举个“栗”子

栗子3

6. 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BD \perp AC$ ， $\angle ABC = 72^\circ$ ，则 $\angle ABD = (\quad)$ 。



A. 36°

B. 54°

C. 18°

D. 64°

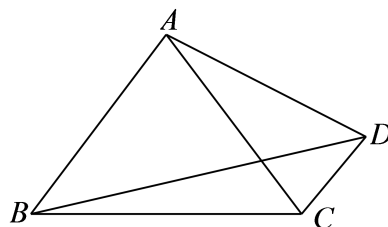
【备注】直接应用等边对等角计算，比较基础

【答案】B

【解析】 $\because AB = AC, \angle ABC = 72^\circ,$
 $\therefore \angle ABC = \angle ACB = 72^\circ,$
 $\therefore \angle A = 36^\circ,$
 $\because BD \perp AC,$
 $\therefore \angle ABD = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ.$

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-等边对等角

7. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AB = AC = AD$ ， $\angle BAD = 100^\circ$ ， $\angle CBD = 18^\circ$ ，则 $\angle BDC$ 的大小为（ ）。



- A. 32° B. 36° C. 40° D. 42°

【备注】题目给到的相等的边比较多，涉及到多次等边对等角，让学生熟练这类计算

【答案】A

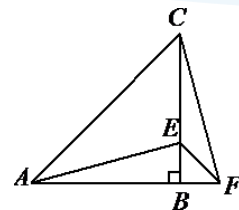
【解析】 $\because AB = AD, \angle BAD = 100^\circ,$
 $\therefore \angle ABD = \angle ADB = 40^\circ,$
 $\because AB = AC, \angle ABC = \angle ACB = 58^\circ,$
 $\therefore \angle BAC = 64^\circ, \angle DAC = 36^\circ,$
 $\because AD = AC,$
 $\therefore \angle ADC = 72^\circ, \angle BDC = 32^\circ.$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】等腰三角形的性质-等边对等角

栗子4

8. 已知，如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， F 为 AB 延长线上一点，点 E 在 BC 上， $BE = BF$ ，连结 AE 、 EF 和 CF ， $\angle CAE = 30^\circ$ ，则 $\angle EFC = \underline{\quad\quad}^\circ$ 。



【备注】与全等三角形结合，先判定全等，再利用对应边相等，进而得到等腰直角三角形

【答案】30

【解析】由题可证 $\triangle BAE \cong \triangle BCF$ ，

在等腰Rt $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 45^\circ$ 。

$\therefore \angle CAE = 30^\circ$ ， $\therefore \angle BAE = 15^\circ$ 。

$\therefore \angle BEA = \angle BFC = 75^\circ$ 。

又 $\therefore \angle BFE = 45^\circ$ ，

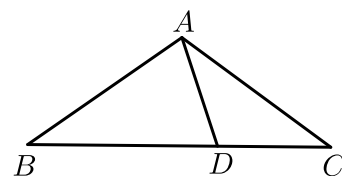
$\therefore \angle EFC = 30^\circ$ 。

【标注】【知识点】等腰直角三角形的性质

【能力】运算能力

栗子5

9. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 为 BC 上一点，且 $AB = BD$ ， $AD = DC$ ，则 $\angle BAC$ 为（ ）。



A. 108°

B. 72°

C. 36°

D. 144°

【备注】题目给到的相等的边较多，但题干没有度数，无法直接求出每个角，可以设未知数做，再结合外角层层推导，得到最后的结果

【答案】A

【解析】 $\because AB = AC = BD$ ， $AD = DC$ ，

$\therefore \angle B = \angle C = \angle DAC$ ， $\angle BAD = \angle BDA$ ，设 $\angle B = \angle C = \angle DAC = x$ ，则

$\angle BAD = \angle BDA = \angle C + \angle DAC = 2x$ ，

$\therefore \angle B + \angle C + \angle BAC = 180^\circ$ ，即 $x + x + 2x + x = 180^\circ$ ，解得 $x = 36^\circ$ ，

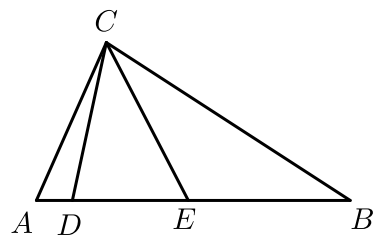
$\therefore \angle B = \angle C = \angle DAC = 36^\circ$ ，

$$\begin{aligned}
 \therefore \angle BAD &= \angle BDA = 72^\circ, \\
 \therefore \angle BAC &= \angle BAD + \angle DAC \\
 &= 72^\circ + 36^\circ \\
 &= 108^\circ. \\
 \text{故选: A.}
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-等边对等角

独步天下

10. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, D, E 为斜边 AB 上的两个点, 且 $BD = BC$, $AE = AC$, 则 $\angle DCE$ 的大小为 _____ .



【备注】第9题的延伸, 要设两个未知数再去推导其他角度, 难度较大

【答案】 45°

【解析】依题可知 $BD = BC$, $AE = AC$, $\angle BDC = \angle BCD$, $\angle AEC = \angle ACE$.

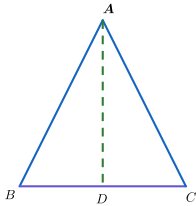
$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle A + \angle B = 90^\circ.$$

$$2(\angle BDC + \angle AEC) = 180^\circ - \angle B + 180^\circ - \angle A = 360^\circ - (\angle A + \angle B) = 270^\circ.$$

$$\angle BDC + \angle AEC = 135^\circ, \angle DCE = 180^\circ - (\angle BDC + \angle AEC) = 45^\circ.$$

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-等边对等角

2. 三线合一

性质2	等腰三角形的 <u>顶角平分</u> 、底边上的 <u>中线</u> 、底边上的 <u>高</u> 相互重合 (简写成 “ <u>三线合一</u> ”) .
	【用符号语言表示】 $\because AB = AC, BD = CD$ $\therefore \underline{AD \perp BC}, \underline{\angle BAD = \angle CAD}$

【备注】由上述 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ ；可知等腰三角形中顶角平分线、底边上的中线、底边上的高这三个条件已知其中一个可直接得到另外两个．从而得到性质2．

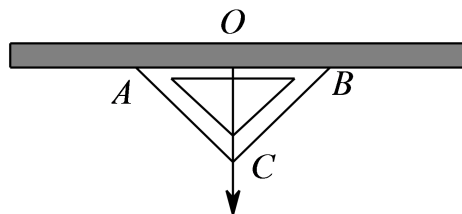
【知识拓展】

- 1．等腰三角形两腰相等是证明两底角相等的依据；“三线合一”是证明两角相等、两线段相等及两直线互相垂直的依据；
- 2．等腰直角三角形的两个底角为 45° ；
- 3．等腰三角形中顶角平分线、底边上的中线、底边上的高这三个条件中已知一个条件可直接得到另外两个条件；
- 4．应用“三线合一”性质作辅助线，所作辅助线不能同时满足两条线的性质，如不能既作中线又作高，可通过作中线求证垂直或作高求证中线．

举个“栗”子

栗子6

11. 某地地震过后，河沿村中学的同学用下面的方法检测教室的房梁是否水平：在等腰直角三角尺斜边中点拴一条线绳，线绳的另一端拴一个铅锤，把这块三角尺的斜边贴在房梁上，结果线绳经过三角尺的直角顶点，同学们由此确信房梁是水平的，他们判定的依据是（ ）．



- A. 等边对等角 B. 等角对等边
- C. 等腰三角形底边上的中线和底边上的高重合 D. 等腰三角形顶角平分线与底边上的中线重合

【备注】依据问题，注意识别即可

【答案】C

【解析】 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，

$$\therefore AC = BC,$$

$\therefore$ 点 O 是 AB 的中点，

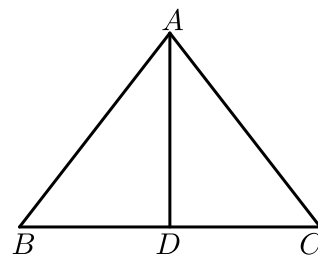
$$\therefore AO = BO,$$

$$\therefore OC \perp AB.$$

故选C.

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

12. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是 BC 的中点，下列结论不正确的是（ ）.



A. $\angle B = \angle C$

B. $AD \perp BC$

C. $AB = 2BD$

D. AD 平分 $\angle BAC$

【备注】三线合一的概念，直接进行判断，比较基础

【答案】C

【解析】 $\because \triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是 BC 中点，

$$\therefore AD \perp BC, \angle B = \angle C, \angle BAD = \angle CAD,$$

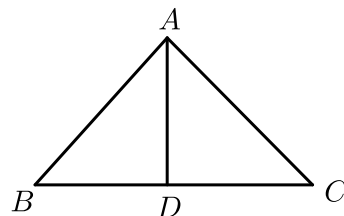
即 AD 平分 $\angle BAC$ ，

故A，B，D三项正确，C不正确.

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

栗子7

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ，若 $AB = 6$ ， $CD = 4$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长是_____.



【备注】三线合一的应用，与线段有关，推导出中点解题

【答案】20

【解析】 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形，

又 $\because AD \perp BC$ 于点 D ，

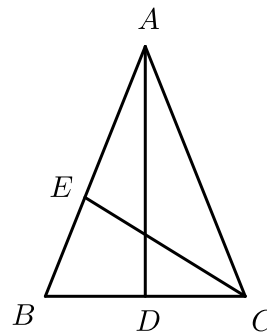
$\therefore BD = CD$ ，

$\because AB = 6$ ， $CD = 4$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 的周长 $= 6 + 4 + 4 + 6 = 20$ 。

【标注】【知识点】三角形的周长与面积问题

14. 如图， AD ， CE 分别是 $\triangle ABC$ 的中线和角平分线。若 $AB = AC$ ， $\angle CAD = 20^\circ$ ，则 $\angle ACE$ 的度数是（ ）。



A. 20°

B. 35°

C. 40°

D. 70°

【备注】三线合一的应用，与角有关，利用角平分线倒角

【答案】B

【解析】 $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线， $AB = AC$ ， $\angle CAD = 20^\circ$ ，

$\therefore \angle CAB = 2\angle CAD = 40^\circ$ ， $\angle B = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CAB) = 70^\circ$ 。

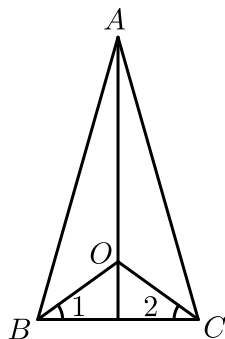
$\because CE$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACB = 35^\circ$ 。

故选：B。

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

15. 已知：如图， $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $AB = AC$ ，且 $\angle ABO = \angle ACO$ ．求证：



(1) $\angle 1 = \angle 2$.

(2) $OA \perp BC$.

【备注】简单几何证明，带学生规范书写过程，练习册有对应的补充题

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB ,$$

$$\because \angle ABO = \angle ACO ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 .$$

(2) $\because \angle 1 = \angle 2$,

$$\therefore OB = OC ,$$

在 $\triangle ABO$ 与 $\triangle ACO$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle ABO = \angle ACO , \\ OB = OC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACO \text{ (SAS)} ,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle CAO ,$$

$$\therefore AO \text{ 平分 } \angle BAC ,$$

$$\because \triangle ABC \text{ 是等腰三角形} ,$$

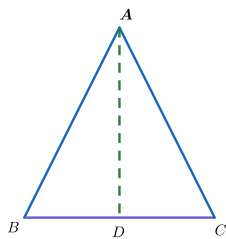
$$\therefore OA \perp BC .$$

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

三、 等腰三角形的判定

①利用定义来判定：有 两条边相等 的三角形叫做等腰三角形.

②判定定理：如果一个三角形 有两个角相等，那么这两个角 所对的边 也相等
(简称“等角对等边”)。



书写： $\because \angle B = \angle C$

$\therefore \underline{AB = AC}$ (等角对等边) 。

【备注】 已知：在三角形 AOB 中， $\angle A = \angle B$

求证： $OA = OB$

证明：过点 O 作 $OD \perp AB$ ，垂足为 D

$\because OD \perp AB$

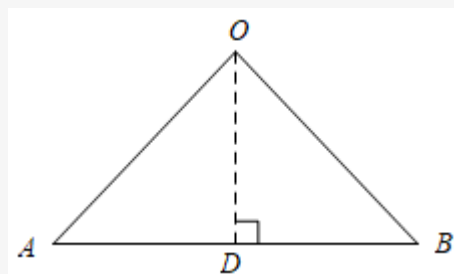
$\therefore \angle OAD = \angle OBD = 90^\circ$

在 $\triangle OAD$ 和 $\triangle OBD$ 中

$$\begin{cases} \angle A = \angle B \\ \angle ODA = \angle ODB \\ OD = OD \end{cases}$$

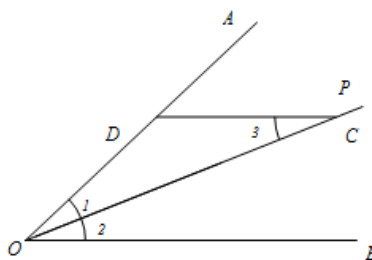
$\therefore \triangle OAD \cong \triangle OBD (AAS)$

$\therefore OA = OB$

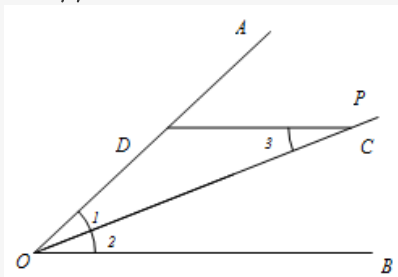


③ “角平分线+平行线” $\rightarrow$ 等腰 三角形

如图， OP 平分 $\angle AOB$ ， $CD \parallel OA$ ，则 $\triangle OCD$ 是等腰三角形。



【备注】 如图所示， OP 平分 $\angle AOB$ ， $CD \parallel OB$ ，则 $\triangle OCD$ 是等腰三角形。



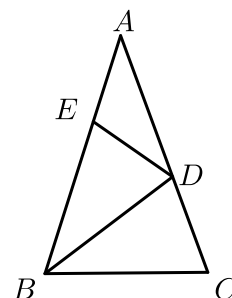
模型中共有三个元素：等腰、平行、角分线。

实际上，三个条件中任意知道两个，都能推出第三个，俗称“知二推一”。

👤 举个“栗”子

栗子9

16. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 36^\circ$ ， $AB = AC$ ， BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 E 在 AB 上，且 $BE = BC$ ，则图中等腰三角形共有（ ）。



- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

【备注】数个数问题，注意到36度、72度、72度这个特殊的三角形

【答案】 D

【解析】 $\because AB = AC$ ， $\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形。

$$\because AB = AC, \angle A = 36^\circ, \therefore \angle ABC = \angle C = 72^\circ,$$

$\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABD = 36^\circ, \therefore BD = AD,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰三角形。

$$\text{在} \triangle BCD \text{中}, \therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle DBC - \angle C = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$$

,

$$\therefore \angle C = \angle BDC = 72^\circ,$$

$\therefore BD = BC$ ， $\therefore \triangle BCD$ 是等腰三角形。

$\because BE = BC$ ， $\therefore BD = BE$ ， $\therefore \triangle BDE$ 是等腰三角形。

$$\therefore \angle BED = (180^\circ - 36^\circ) \div 2 = 72^\circ,$$

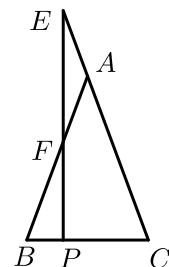
$$\therefore \angle ADE = \angle BED - \angle A = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ,$$

$\therefore \angle A = \angle ADE$ ， $\therefore DE = AE$ ， $\therefore \triangle ADE$ 是等腰三角形。

$\therefore$ 题图中的等腰三角形有5个。故选D。

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-等边对等角

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 E 在 CA 延长线上， $EP \perp BC$ 于点 P ，交 AB 于点 F ，若 $AF = 2$ ， $BF = 3$ ，则 CE 的长度为 _____ 。



【备注】 性质与判定的小综合，先利用性质得到 $\angle B = \angle C$ ，再倒角证明出 $\triangle AEF$ 为等腰三角形，进而得到 CE 的长

【答案】 7

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中，

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because EP \perp BC$$

$$\therefore \angle C + \angle E = 90^\circ, \angle B + \angle BFP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle E = \angle BFP,$$

$$\text{又} \because \angle BFP = \angle AFE,$$

$$\therefore \angle E = \angle AFE,$$

$$\therefore AF = AE,$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 是等腰三角形.}$$

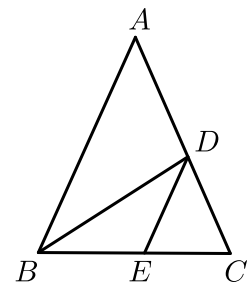
$$\text{又} \because AF = 2, BF = 3$$

$$\therefore CA = AB = 5, AE = 2$$

$$\therefore CE = 7.$$

【标注】 【知识点】 等腰三角形的性质与判定综合问题

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 、 E 两点分别在 AC 、 BC 上， BD 是 $\angle ABC$ 的平分线， $DE \parallel AB$ ，若 $BE = 5\text{cm}$ ， $CE = 3\text{cm}$ ，则 $\triangle CDE$ 的周长是 _____ cm 。



【备注】 等腰、平行、角分线的知一推二，判定出 $\triangle DEF$ 为等腰三角形，再进行推导

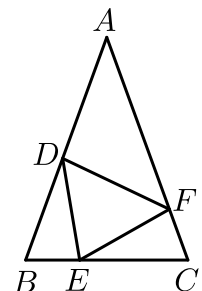
【答案】 13

【解析】 $\because DE \parallel AB$, BD 平分 $\angle ABC$,
 $\therefore \angle EBD = \angle ABD = \angle EDB$,
 $\therefore DE = BE = 5\text{cm}$,
 $\because AB = AC$, $DE \parallel AB$,
 $\therefore \angle C = \angle ABE = \angle DEC$,
 $\therefore DC = DE = 5\text{cm}$, 且 $CE = 3\text{cm}$,
 $\therefore DE + EC + CD = 5\text{cm} + 3\text{cm} + 5\text{cm} = 13\text{cm}$,
 即 $\triangle CDE$ 的周长为13cm,
 故答案为: 13cm.

【标注】 【知识点】 等腰三角形的判定-等角对等边

栗子11

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 、 E 、 F 分别在 AB 、 BC 、 AC 边上, 且 $BE = CF$,
 $BD = CE$.



- (1) 求证: $\triangle DEF$ 是等腰三角形.
- (2) 当 $\angle A = 40^\circ$ 时, 求 $\angle DEF$ 的度数.

【备注】 等腰三角形判定的证明题, 注意与全等结合可以复习一下全等的书写

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $\angle DEF = 70^\circ$.

【解析】(1) $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

在 $\triangle DBE$ 和 $\triangle ECF$ 中

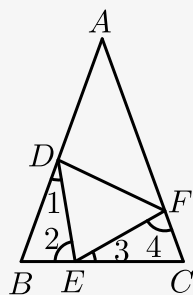
$$\begin{cases} BE = CF \\ \angle ABC = \angle ACB, \\ BD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DBE \cong \triangle ECF(\text{SAS}),$$

$$\therefore DE = EF,$$

$\therefore \triangle DEF$ 是等腰三角形.

(2) 如图:



$$\therefore \triangle DBE \cong \triangle ECF,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4,$$

$$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 2 = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle DEF = 70^\circ.$$

【标注】【知识点】等腰三角形的判定-两边相等

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】SAS

【能力】推理论证能力